Wu, Y.-T., Chang, M., Li, B., Chan, T.-W., Kong, S. C., Lin, H.-C.-K., Chu, H.-C., Jan, M., Lee, M.-H., Dong, Y., Tse, K. H., Wong, T. L., & Li, P. (Eds.). (2016). *Conference Proceedings of the 20th Global Chinese Conference on Computers in Education 2016*. Hong Kong: The Hong Kong Institute of Education.

禪繞畫繪圖技法中隱含的數學教學意涵

Zentangle Drawing Techniques Implies Mathematical Teaching Connotation

胡裕仁 [1,4*]，藍邦偉 [2]，劉繕榜 [3]，葉家炎 [3]，聶華明 [5]
[1] 臺北市立內湖高級工業職業學校
[2] 泰北高級中學
[3] 臺北市立大直高級中學
[4] 東吳大學精算與財務工程學系
[5] 明新科技大學服務事業管理研究所
[*] huyujen@gmail.com

【摘要】 本文說明如何透過中學數學分析，找出禪繞畫作圖時可能具有的數學原理，並分析出禪繞畫的規律性及對應的演算式。研究以電腦幾何繪圖方式呈現最後結果。研究首先選定一幅禪繞畫作為仿製主題。實驗利用幾何學原理來進行數學分析與模擬。研究發現：若善用鑲嵌、平移、旋轉、對稱、疊代、伸縮等數學幾何概念，可順利地將一些基本圖樣或線條變換出一幅仿製的禪繞畫圖畫。

【關鍵字】 禪繞畫；幾何變換；線性矩陣；數學教育

Abstract: *A Zentangle is an abstract drawing created using repetitive patterns according to the trademarked Zentangle Method. In this study, we try to use mathematical method to analysis the regular pattern of Zentangle. Finally in our study we find that we can use tessellation, translatioton, rotation, symmetry, iteration, and dilation to draw a Zentangle by some basic patterns.*

Keywords: Zentangle, Geometric Transformation, Linear Matrix, Mathematics Education

1. 前言

禪繞畫是一種新式的繪畫風格，它們看似無序卻又美麗的線條，卻有著不同於一般彩色圖畫的吸引力。本研究發現禪繞畫是由許多相似的線條與圖形，重複畫在一塊區域，再與其他不同線條組成的圖形結合成。因此本研究希望藉由中學的數學分析來解構做出禪繞畫的繪圖技法。禪繞畫是由藝術家芮克·羅伯茲(Rick Roberts)與瑪麗亞·湯瑪斯(Maria Thomas)所創造的(程靜怡，2015)。禪繞，原文為「Zentangle® 」，是由禪繞畫創辦人羅伯茲夫婦共同命名並登記註冊成商標(貝卡·克胡拉，2011)。「正式來說，禪繞這個字是指**重複**畫出圖形來提升專注力的方式。但這個字也可以指畫在紙磚上的抽象藝術。禪繞的重複圖形並不代表任何具象的事物，主要畫在紙磚上，並稱為圖樣」(貝卡·克胡拉，2011) 。

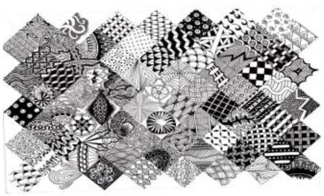

圖 1 禪繞畫（Design by TheLonelyMaiden）[8]

鑲嵌：

圖 2 規則鑲嵌圖案

圖 3 半規則鑲嵌圖案

圖 4 不規則鑲嵌圖案

[8] **Zentangle Pattern Quilt 2**。擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自 http://thelonelymaiden.deviantart.com/art/Zentangle-Pattern-Quilt-2-372074879.

Wu, Y.-T., Chang, M., Li, B., Chan, T.-W., Kong, S. C., Lin, H.-C.-K., Chu, H.-C., Jan, M., Lee, M.-H., Dong, Y., Tse, K. H., Wong, T. L., & Li, P. (Eds.). (2016). *Conference Proceedings of the 20th Global Chinese Conference on Computers in Education 2016*. Hong Kong: The Hong Kong Institute of Education.

自相似性：自相似性是鑲嵌圖案內生成美麗圖形的一種共同存在的特性，如圖 5 及圖 6。另外一些非碎形的構圖及其它維度亦可使用此一方式設計因此可得出**鑲嵌定理**(李忠，2007；張瑜軒，2002；*謝南瑞*，2001；遍歷定理[9])。

鑲嵌定理：設 $f=\{f_1,\ldots,f_m\}$ 是在 m 個□^{n} 中有蓋射映射，則一定存在一個唯一的閉集合 F，

使得 $\boxed{F=\bigcup_{j=1}^{m} f_j(F)}$ ---轉換公式 1，f：限定的圖形範圍、f_j，$j=1,\ldots,m$ 表示鑲嵌的區塊子圖。

規則鑲嵌圖案（Regular tessellation）[10]：由一致的規則多邊形所組成的鑲嵌圖案。因此相鄰的正多邊形內角總和為 360 度。

半規則鑲嵌圖案（Semi-regular tessellation）：由兩種或以上的正多邊形所組成的鑲嵌圖案。

疊代：若 F 是一個自相似集，則它的相似性維數等於豪斯多夫維數 $\boxed{d=\dfrac{\log(a)}{\log(N)}}$ ---轉換公式 2，d：疊代關係、a：新生成的圖樣、N：基本圖樣。對簡單的幾何目標，如線、長方形、長方體等。豪斯多夫維通常等於幾何維度或拓撲維度。亦即，一個物體的豪斯多夫維可能會是一個非整數型態的有理數或無理數。例如：圖 6 的圖像生成是在給定範圍內不斷的依等角度模式，進行保測變換及各態經歷與伸縮複製生成(李忠，2007; *謝南瑞*，2001; 遍歷定理) 。

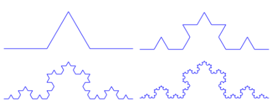

圖 5 疊代雪花圖形[11]

圖 6 疊代樹葉圖形

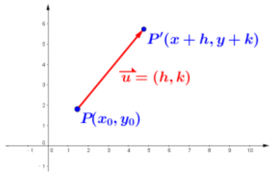

圖 7 點的平移

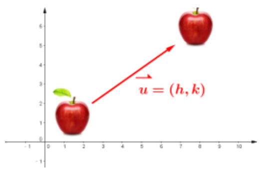

圖 8 圖形的平移

平移：將一個點 $P(x,y)$ 沿著向量 $\bar{u}=(h,k)$ 移動，可以得到 $P'(x+h,y+k)$，如圖 7 及圖 8。

其矩陣型式為 $\boxed{\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+h\\y+k\end{bmatrix}}$ ---轉換公式 3。

旋轉：已知平面座標系的原點 O 及一點 $P(x,y)$，若以 O 為旋轉中心，逆時針方向旋轉 θ 角到點 $P'(x',y')$，如圖 9 及圖 10，則其矩陣型式為：$\boxed{P':\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}$ ---轉換公式 4。

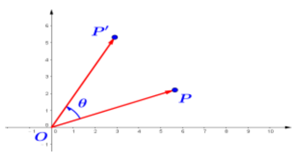

圖 9 點的旋轉

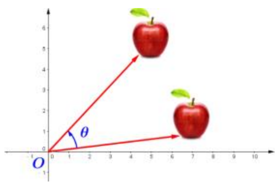

圖 10 圖形的旋轉

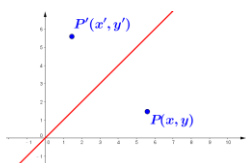

圖 11 點的鏡射

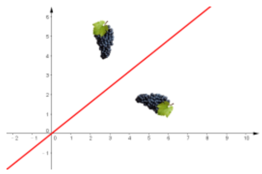

圖 12 圖形的鏡射

對稱

---

[9] **遍歷定理**。擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自百度百科 http://baike.baidu.com/view/692121.html.

[10] 張瑜軒(2002)。**群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成之研究─以多媒體創作為例**。中原大學商業設計系碩士論文。

[11] **分形與混沌，用 Pythony 做科學計算**。擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自 http://http://myshare.dscloud.me/scipydoc/fractal_chaos.html

Wu, Y.-T., Chang, M., Li, B., Chan, T.-W., Kong, S. C., Lin, H.-C.-K., Chu, H.-C., Jan, M., Lee, M.-H., Dong, Y., Tse, K. H., Wong, T. L., & Li, P. (Eds.). (2016). *Conference Proceedings of the 20th Global Chinese Conference on Computers in Education 2016*. Hong Kong: The Hong Kong Institute of Education.

點對稱：將一個點 $P(x,y)$ 關於 $Q(h,k)$ 的對稱點 P' 為 $(2h-x,2k-y)$ ，如圖 11。

線對稱：線對稱又稱鏡射，在座標平面上，設 θ 是一個固定的有向角，L 是有向角 θ 的終邊所在之直線，若點 $P(x,y)$ 對直線 $L: y = x\tan\theta$ 鏡射後得點 $P'(x',y')$ ，如圖 12，則其矩陣型式為： $\boxed{P':\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{---轉換公式 5}}$。

伸縮

點的伸縮：在座標平面上，設點 $P(x,y)$ 以原點為中心，對 x 軸伸縮 h 倍($h>0$)，對 y 軸伸縮 k 倍 ($k>0$)，得點 $P'(x',y')$，此時 $x'=hx$，$y'=ky$，則其矩陣型式為：$P':\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

當 $h=k$ 時，矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$ 的作用就是以原點為中心點的放大或縮小，如圖 13 所示。

圖形的伸縮：在座標平面上，設圖形 $C: f(x,y)$ 以原點為中心，對 x 軸伸縮 h 倍($h>0$)，對 y 軸伸縮 h 倍($h>0$)，得圖形 $C': f(x',y')$ ，此時 $x'=hx$ ， $y'=hy$ ，則其矩陣型式為：

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hx \\ hy \end{bmatrix}$ ，即 $\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x'}{h} \\ \frac{y'}{h} \end{bmatrix} \text{---轉換公式 6}}$。如圖 14 與 15 所示。

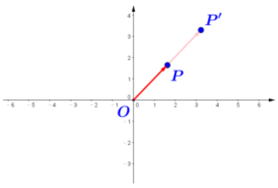

圖 13 以原點為中心點的伸縮

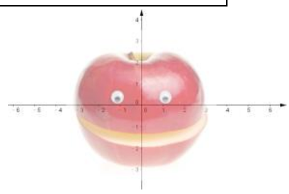

圖 14 以原點為中心圖形的伸縮

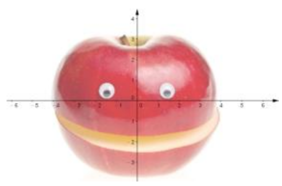

圖 15 以原點為中心圖形的伸縮

圖 16 禪繞畫[12]

圖 17 將圖 16 以同心圓方式分割

圖 18 將圖 16 以同心圓及線段分割

圖 19 電腦作圖結果

2. 研究目的

觀察禪繞畫的創作手法與規則，希望找出繪製禪繞畫的**規律性**方法。

是否有可能透過**數學結構**來重新解釋禪繞畫的圖型原理？

探討如何利用 6 項轉換公式來解構禪繞畫的各種圖形並進行數學的規律性的教學演示。

禪繞畫中的圖形規律性分析與找尋：本研究試圖仿製出圖 16 的圖形。圖形分析：利用目視觀察法可發現，圖 16 是以同心圓(以點 O 為圓心)的方式，將圖案層層交叉相疊，再將此圖分為 9 塊扇形，則能觀察到每塊以扇形分割出的圖案都彼此相似。

[12]擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自 https://www.beclass.com/default.php?name=ShowList&op=regist&rgstid=173523b538ded2f2a091&contact_board=true.

作圖說明：由圖 16 至 18 的觀察，本研究先做出其中一塊扇形中的圖樣，再由**旋轉**複製的方式完成圖 19。

實驗結果：以上作圖的步驟，可將繪製禪繞畫的步驟分成三階段。

階段 1：確定一塊可作圖的區域形狀。

階段 2：在區域內以直線、曲線等任意線條作出基本的參考圖樣。

階段 3：透過適當的**鑲嵌、疊代、平移、旋轉、對稱、伸縮**等幾何作圖，完成禪繞畫。

3. 研究討論

在辭典中所謂的『設計』的意思，是指有系統地設想和計劃，設想是目的，計劃是過程與安排[13]。本研究發現由中學數學中的**疊代(轉換公式 1)、平移(轉換公式 2)、鑲嵌(轉換公式 3)、旋轉(轉換公式 4)、對稱(轉換公式 5)、伸縮(轉換公式 6)**等六種數學概念。可以來解釋多數的禪繞畫的創作手法與繪圖規則。

4. 教學應用

本研究解釋禪繞畫背後的幾何圖形原理，適度地將矩陣代數與幾何分析混合使用，可以在中學數學的教學中啟發學生對於數學的美好印象。另外，教師亦可以藉由重複的形體或相似比例的形狀和線條來進行數學教案與教學設計。

誌謝

感謝中華民國科技部研究計畫編號 MOST 104-2514-S-159-001 及臺北市教育局經費補助。

參考文獻

貝卡．克胡拉(吳琪仁譯，2011)。**最新禪繞作品大全：500 幅全球最新、啟發創意、充滿設計感的禪繞作品範例**。台北：遠流出版社。

李忠(姜伯駒主編，2007)。**迭代 渾沌 分形**。北京：科學出版社。

張瑜軒(2002)。**群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成之研究-以多媒體創作為例**。中原大學商業設計系碩士論文。

程靜怡(2015)。**禪繞插畫藝術的綜合性表現技法之研究**。中國文化大學藝術學院美術學系碩士論文。

謝南瑞(2001)。多重碎形。**數學傳播，25**(1)，27-32。

分形與混沌，用 Pythony 做科學計算。擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自 http://http://myshare.dscloud.me/scipydoc/fractal_chaos.html

Zentangle Pattern Quilt 2。擷取於 2015 年 11 月 06 日，取自 http://thelonelymaiden.deviantart.com/art/Zentangle-Pattern-Quilt-2-372074879.

[13] Dictionary meanings in the Cambridge Dictionary of American English, at Dictionary.com (esp. meanings 1–5 and 7–8) and at AskOxford.