



# 顯理中學

## 優化課堂學習研究計劃

### 數學科

### 中一級 代數式的運算

#### 計劃時期

2007年1月份 ~ 6月份

#### 計劃成員

顯理中學教師：

容世杰、林旋芬、羅傑堯

香港教育學院成員：

李華昌、黎敏兒

教育局學校發展主任：

鄭鎮文、李朝輝

#### 選取課題的原因

選擇研究課題的原因：

- 從某些中五學生的小測中發現，部份中五學生仍會對代數式的指數乘除法的運算有所錯誤。
- 在教學時，雖然經常提及定義，但中二及中三學生仍經常在有關題目中的運算上有所錯誤。
- 這課題與往後學習的代數式同類項及異類項等概念相關。

經過小組間的討論及研究，有鑑學生於中二、中三有關指數運算上的課題表現未達理想，故小組成員希望透過指數定義加深學生明白指數定律的來源。從而協助學生建立正確的指數運算觀念，而並不只是懂得背誦公式以應付題目要求。





# 診斷學生的學習難點

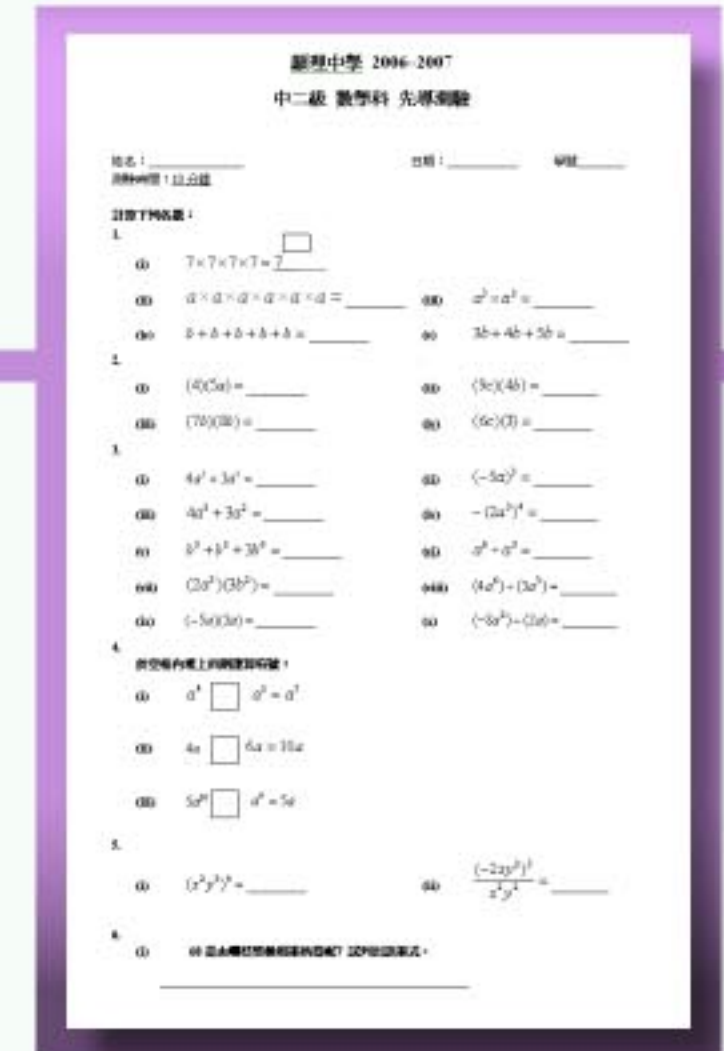
## (B). 學生面談

### (A). 先導測驗

在計劃的初期，為了更能了解學生所遇到的困難，於是先作製一份先導測驗卷。由本校中二級 240多名學生進行全級的先導測驗。加上其後與學生進行直接面談，可綜合出下列數點學生常遇的問題：



【上圖為面談的照片】



- 相乘與相加概念的錯誤，例如： $a \times a \times a = 3a$ 、 $a + a + a = a^3$
- 同類項相乘與相加的錯誤，例如： $(7a)(8b) = 56b$ 、 $4a^2 + 3a^2 = 7a^4$
- 冪分配所出現的錯誤，例如： $(Ax)^m = Ax^m$ 、 $(Ax)^m = A^m x$
- 多重冪混算所出現的錯誤，例如： $(x^n)^m = x^{n+m}$ 、 $(x^n)^m = x^{m^n}$
- 異類項相乘所出現的錯誤，例如： $(Ax^m)(By^n) = ABxy^{(m+n)}$ 、 $(Ax^m)(By^n) = ABxy^{(mn)}$
- 指數基本性質概念不穩所出現的錯誤，例如： $a^m + a^n = a^{m+n}$ 、 $a^m - a^n = a^{m-n}$ 、 $a^m \times a^n = a^{mn}$

### (C). 前測

下圖為前測卷的題目，加上評卷專用的代號，可有效分析學生較難掌握的題類。



### (D). 課前訪談



【上圖為課前訪談的照片】



- 題目為確定學生對下列數點的認知：
1. 利用連乘法展開  $5^6$ 、 $5^8$ 。  
化簡例如  $5^6 \times 5^8$  等數式，並以指數記數法表示答案。
  2. 利用連乘法表示  $(8^5)^3$ ，然後代簡同類题目的數式，並以指數記數法表示答案。
  3. 利用連乘法展開  $\frac{25^7}{25^{10}}$ ，然後約簡。題目可分為  $\frac{a^8}{a^4}$ 、 $\frac{b^7}{b^7}$ 、 $\frac{h^2}{h^{10}}$  三類。





## 課前會議

經過先導測驗、面談、前測及課前訪談等準備後，研究小組的成員能夠正式確立研究課的學習內容及其關鍵特徵。

### 研究課的學習內容(OL)

運用指數記數法定義及連乘展開法的性質推論代數式的運算法則：

$$1. \quad a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{個} a \text{連乘}} \times \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{個} a \text{連乘}} = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m+n \text{個} a \text{連乘}}$$

$$2. \quad a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{個} a \text{連乘}}}{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{個} a \text{連乘}}}$$

$$3. \quad (a^m)^n = \overbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}^{n \text{個} (a^m) \text{連乘}}$$

$$= \overbrace{\left( \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{個} a \text{連乘}} \right) \times \left( \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{個} a \text{連乘}} \right) \times \cdots \times \left( \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{個} a \text{連乘}} \right)}^{n \text{組} m \text{個} a \text{連乘}}$$

$$= \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(mn) \text{個} a \text{連乘}}$$

### 此學習內容的關鍵特徵(CF)

$$1. \text{ 以指數記數法表示} n \text{個} a \text{連乘} : \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{個} a \text{連乘}} = a^n$$

$$2. \text{ 以連乘式展開} a \text{的} n \text{次} : a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{個} a \text{連乘}}$$





# 教學設計及變易圖式

透過運用變易圖式去設計相關連的教學活動，讓學生更能掌握所學習的課題。以題目中的底數及指數改變、而所用的方法不變，作為活動的主幹。活動主要分成四部分：



## 連乘及指數記數法互化

- (1). 指數記數法化成連乘
- (2). 連乘化成指數記數法
- (3). 學生進行練習
- (4). 討論：如何用指數記數法示  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

### 活動(一)

## 同底數的乘法

- (1). 運用連乘展開法各自展開多個同底數的乘法題目中的被乘數及乘數，讓學生找出結果。  
【強調  $a \times b = ab = (a)(b)$ 】

### 活動(二)

- (2). 學生進行練習
- (3). 討論及讓學生總結出  $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$
- (4). 討論不同底相乘的結果作對照

### 活動(三)

## 指數記數法的冪

- (1). 以運用連乘展開法展開▲，然後代入  $\blacktriangle = 3^5$  及運用連乘式表示，讓學生找出連乘結果，再用指數記數法表示連乘結果。然後討論幾個相似的例題。
- (2). 學生進行練習
- (3). 討論及讓學生總結出  $(a^m)^n = a^{mn}$



## 變易圖式

中一級 第十一課 代數式的運算

|   | 變                  | 不變      | 審辨                   |
|---|--------------------|---------|----------------------|
| <b>【第一部分】 指數記數法(底數)</b>   |                    |         |                      |
| $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$   | 底數                 | 次數      | 對於指數記數法中的底數認識        |
| $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$   |                    |         |                      |
| $a \cdot a \cdot a = a^3$   |                    |         |                      |
| <b>指數記數法(指數)</b>  |                    |         |                      |
| $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$   | 次數                 | 底數      | 對於指數記數法中的指數認識        |
| $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$   |                    |         |                      |
| $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$   | 底數                 | 次數      | 推論出公式                |
| $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$   | - 底數               | 指數記數法定義 |                      |
| (n 個 a 連乘)  | - 次數               |         |                      |
| <b>連乘展開法</b>  |                    |         |                      |
| $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$   | 底數                 | 次數      | 由數字轉成未知數             |
| $a^2 = a \cdot a \cdot a$   |                    |         |                      |
| $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$   | 次數                 | 指數記數法定義 | 推論出公式                |
| (n 個 a 連乘)  |                    |         |                      |
| <b>【第二部分】 同底與不同底相乘</b>  |                    |         |                      |
| $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$   | 同底與不同底相乘           |         | 比較同底與不同底的情況          |
| $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 4^3 \cdot 5$   |                    |         |                      |
| $x \cdot x \cdot x \cdot y = x^3 y$   | 由數字轉成未知數           | 存在不同底   | 不同底不能合併的概念           |
| <b>【第三部分】 指數記數法的冪(多層冪)</b>  |                    |         |                      |
| $(4)^2 = 4 \cdot 4$   | 由底只是一個數轉成底是一個指數    | 利用連乘法展開 | 過渡當底不只是一個數，而是一個指數的情況 |
| $(4^3)^2 = 4^3 \cdot 4^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^6$   |                    |         |                      |
| $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$   | - 由數字轉成未知數<br>- 次數 | 底數是一個指數 | 多層冪的情況               |
| (n 組 m 個 a 連乘)<br>$(a^m)^n = (a^m) \cdot (a^m) \cdot \dots \cdot (a^m)$   | 次數轉成未知數            | 多層冪的概念  | 推論出公式                |
| <b>【第四部分】 除法</b>  |                    |         |                      |
| $3 \div 81 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$   | 由基礎除法轉成指數除法        | 約分的概念   | 對基礎除法的認識             |
| $3 \div 3^4 = \frac{3}{3^4} = \frac{3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{1 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ |                    |         |                      |
| $a \div a^4 = \frac{a}{a^4} = \frac{a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{1 \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$                | 由數字轉成未知數           |         | 指數除法的三種不同情況          |
| $3 \div 5^3 = \frac{3}{5^3}$  | 由同底轉成不同底           |         | 不同底概念用於除法中的情況        |

### 活動(四)

## 同底數的除法

- (1). 先用數字引入除式能以分數形式表示，並可約簡。再轉為未知數，列出約簡時三個不同的可能性，再加上不同底的例子作為反例。
- (2). 學生進行練習
- (3). 討論及讓學生總結出運算的規律



# 學生的學習成果



研究課共進行了四個教學循環。每一研究課堂完成後皆有進行後測及課後訪談，下圖為後測卷。後測卷與前測卷同樣設有評卷代號，這樣除了能分析學生對於哪一部分仍有疑問外，亦可對比前測與後測之間，學生對於先前所未清晰的部分是否已能更清楚明白。

## (A). 學生的前後測卷比較

**前測**

**前測**

**後測**

## 前後測卷的評分準則

評卷代號大約分成七類，以A~G代表。

其中**A**代表懂得使用連乘法展開，例如1(a)(i).  $5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ 。而**B**則表示連乘式完全正確。

**C**表示學生利用自行觀察出的某些規律(利用公式)，直接於沒有寫出連乘式的情況下得到答案。例如4(i).  $(x^3)(x^4) = x^7$ 。

**D**與**E**是關於除法的題目中，涉及約分時的得分，其中**D**代表能正確處理未知數的約分、而**E**則是數字或係數的約分。

例如3(iv).  $\frac{4p^2}{18p^{10}}$ 。

**F**表示學生懂得乘法交換性質，例如4(v).  $(x^3y^2)^2$ 。

**G**表示最後一步的答案正確。

上圖顯示了學生前測及後測間的變化。可見學生懂以利用連乘法展開指數這概念，清晰了解運算中的過程。

## (B). 課後訪談



【上圖為課後訪談的照片】

透過課後訪談，能了解學生的想法。以下節錄了三位學生的感想：

學生甲：「雖然步驟似乎很多，但是很有用，而且一定能計算正確。」

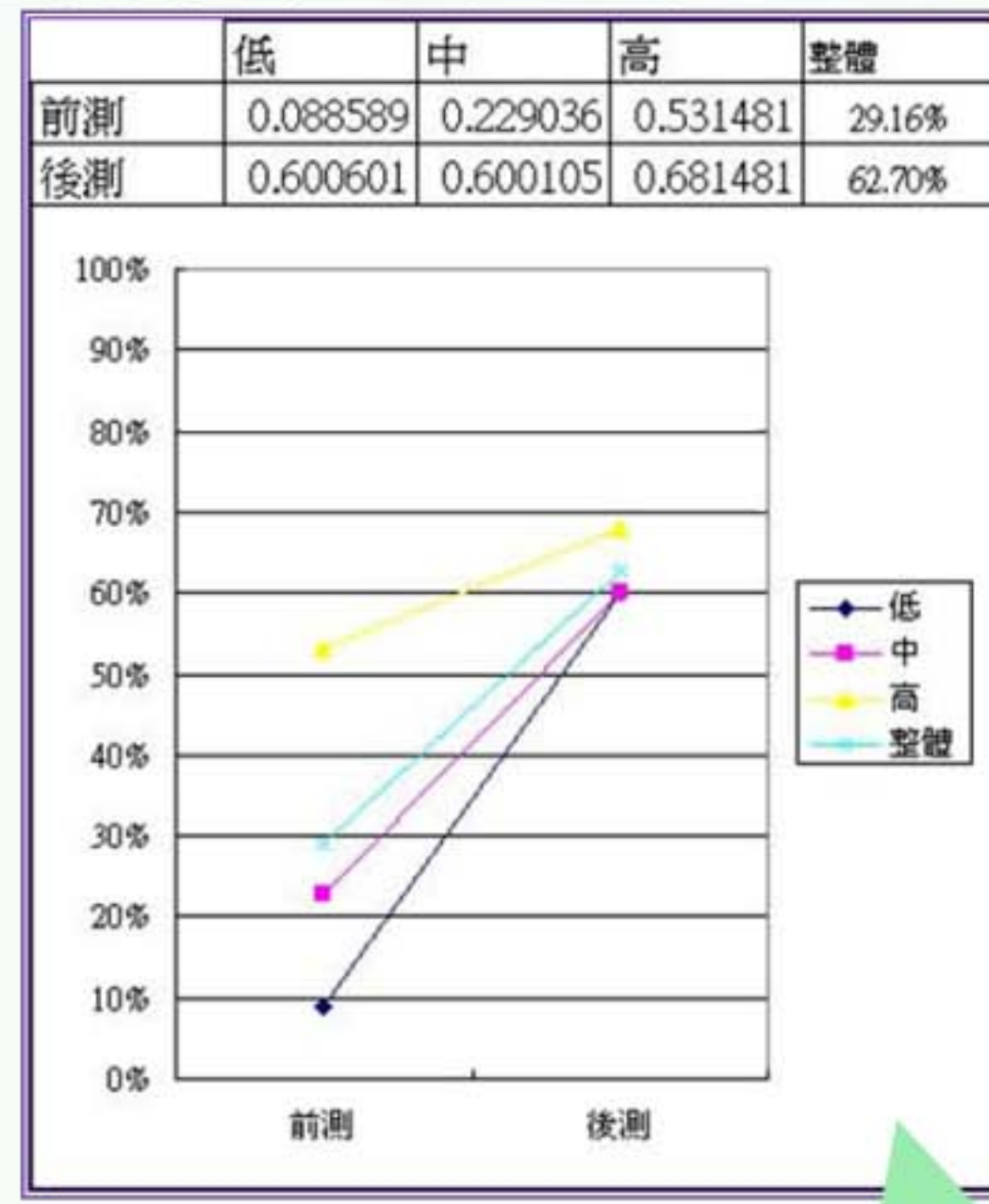
學生乙：「可以回想上課時用的方法，從而知道自己為什麼做錯了。」

學生丙：「利用指數定義， $(3x^2)^4$ 是指有四個 $(3x^2)$ 連乘，運用連乘式展開就是 $(3x^2)(3x^2)(3x^2)(3x^2) = 81x^8$ 。」

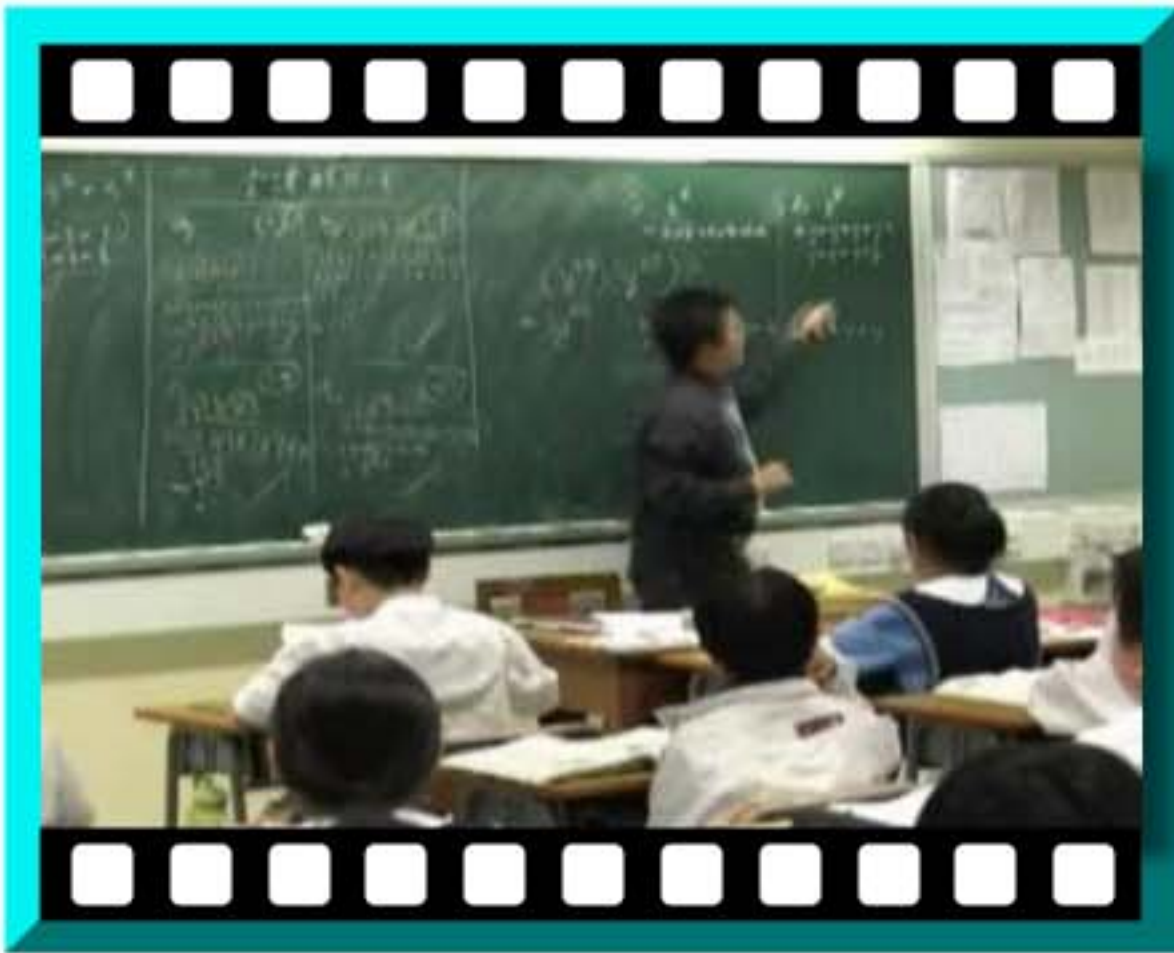
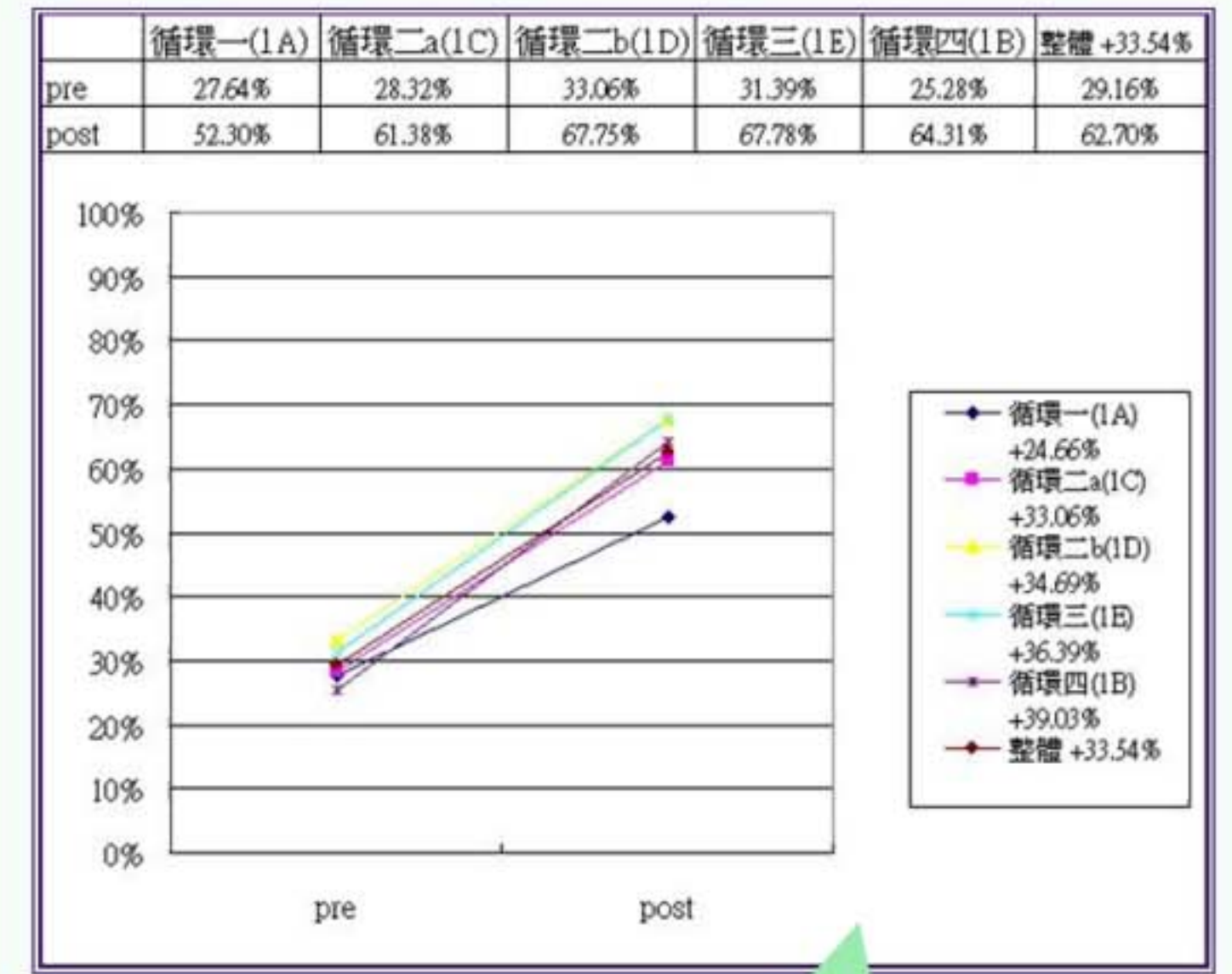




## 前後測結果比較 - 統計圖



## 教學循環之間的變化



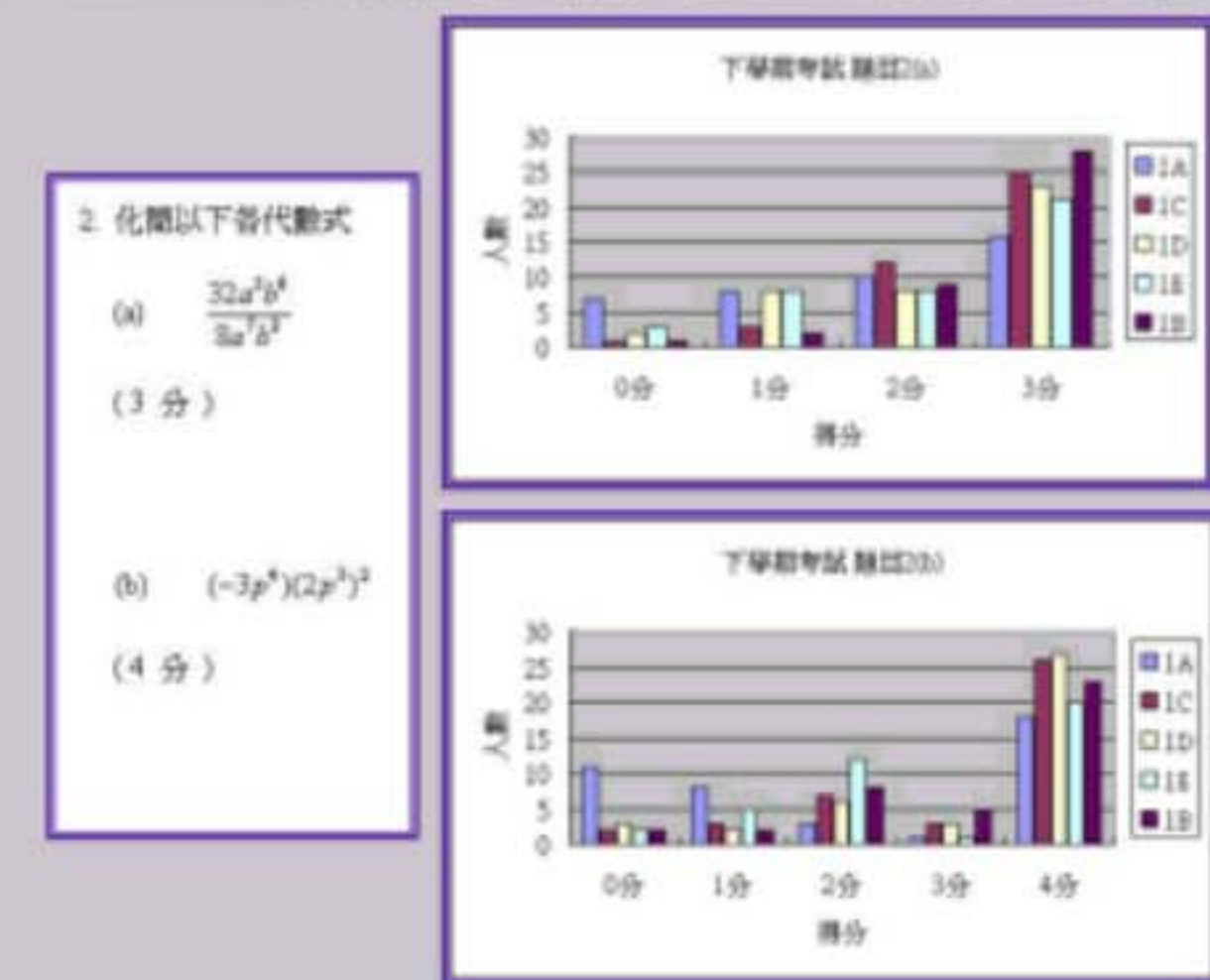
上列圖表則顯示了比較不同能力的學生於前後測成績的結果。結果顯示除了學生成績有明顯增長外，亦能令程度不同的學生之間的學習差異距離縮減，減少了日後再教授涉及同類內容的課題時的困難。

但在是次計劃中，未能深化含有乘方的題目，如  $(x^2)^4$ 、 $(3x^2)^4$ 、 $5(3x^2)^4$ 。故此亦成為來年重點檢視項目之一。

## 研究課後延測驗

雖然已經進行了多次測試、以及了解學生的學習效能，然而研究小組的成員為了能更準確反映測試的結果，決定將與前後測相同的題目設於本校期終試試卷內。結果亦非常正面，有大部分的學生都能夠取得滿分，同時驗證了學生透過變易圖式去明白指數定律的過程能有效提昇學生學習的效能。

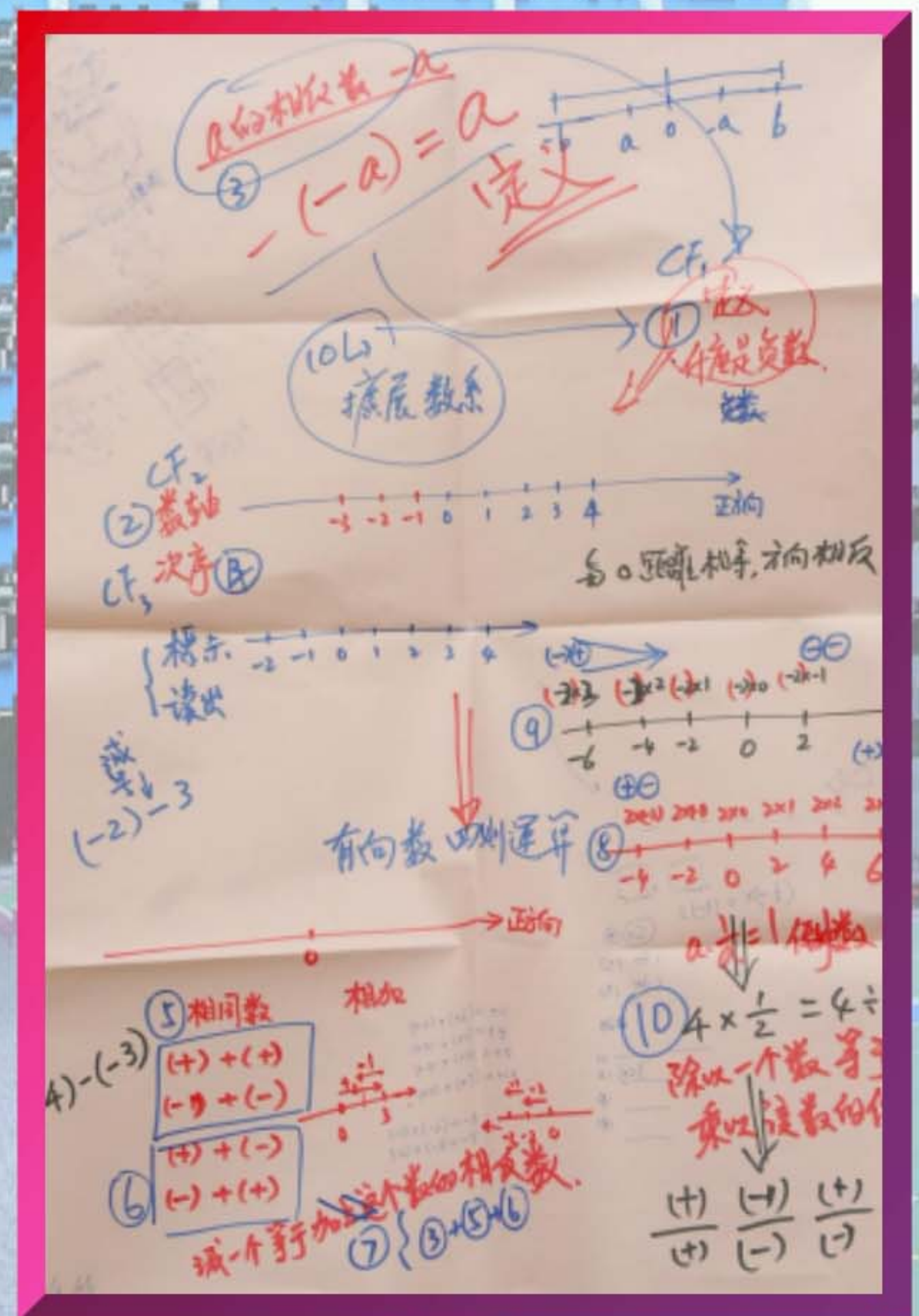
### 中一級下學期考試 指數相關題目成績統計



## 計劃對本校的影響

是次計劃除了有助改善教學質素外，對於本校亦起了正面的影響。老師們透過共同備課，加深了溝通與合作。其中亦能普及優化課堂計劃的精髓，用於中一級每一章課文內，使教學更有系統和效率。

右圖為教師們商討其他主題的概念及教學草圖。



【圖為研究中一級有向數的教學草圖】 P.6