

最小二乘法应用于中学物理实验举例

赖莉飞、王笑君、吴先球

华南师范大学物理系

广州, 510631

电邮: Wangxjun@hsut.scnu.edu.cn

收稿日期: 二零零二年六月十七日(十二月十一日再修定)

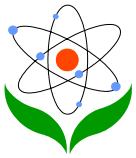
内容

- [摘要](#)
 - [问题的提出](#)
 - [最小二乘法线性拟合](#)
 - [应用](#)
 - [程序设计](#)
 - [参考文献](#)
-

摘要

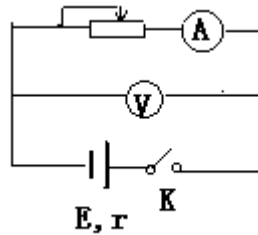
以中学物理求电源电动势和内阻实验为例, 提出采用最小二乘法线性拟合可以较其它方法得到更高的精度。此外, 借助于 C 语言编程, 省却了手工计算的麻烦, 也避免了较高的计算机操作要求。

关键词: 电动势, 内阻, 最小二乘法线性拟合, C 语言



一. 问题的提出

实验"应用全电路的欧姆定律测电源电动势(E)和内阻(r)", 在中学阶段, 可用公式法^[1]和作图法。公式法如图所示, 测出两组电流强度 I 和电压 U 的数据,



代入方程组
$$\begin{cases} U_1 = E - I_1 r \\ U_2 = E - I_2 r \end{cases}$$
 即可求出 E, r。

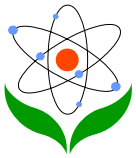
为求准确, 可以多算出几组 E, r, 最后求它们的平均值。这种方法由于有仪器、环境、以及人自身等因素造成的系统误差, 以及目测不准、平衡点确定不准, 读数不准、电源电压起伏而引起微小变化等造成的偶然误差, 使最后结果的误差比较大。作图法则要求学生取十组左右的点, 以路端电流 (I) 为横轴, 路端电压 (U) 为纵轴, 画出 U-I 关系图像, 根据闭合电路的欧姆定律 $U = E - Ir$, 可知 U 是 I 的一次函数, 所作图应为一一直线。通过尽量多的点作一条直线, 或者使这些点尽量接近于一条直线, 那么, 所作直线纵轴的截距就是电源的电动势 E, 横轴的截距就是电路短路时最大电流 I_{max} , 它的斜率的绝对值等于电源的内阻 r, 即 $r = E/I_{max}$ 。这种方法比直接用公式计算精确, 但不同的学生采用不同的标度单位, 对点的处理也不同, 其最终得出的 E, r 误差也较大。本文采用最小二乘法线性拟合, 可以较直接作图法更精确地确定 E 和 r。

二. 最小二乘法线性拟合^{[2][3]}

最小二乘法是数据处理和误差估计中很得力的数学工具, 对于一切从事精密科学实验的人们来说, 应用最小二乘法解决实际问题, 是几乎离不开的手段, 因此, 它成为数据处理中异常活跃和应用最广泛部分之一。

数学公式

如果被测数据满足线性关系式 $y_i = A + B x_i$, 由相关结论可知 (其中 Σ 表示求和, N 表示资料组的总个数)



$$A = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta}$$
$$B = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta}$$
$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2$$

线性拟合

在物理中,如果已知两个量关系,即满足 $y = A + Bx$, 却不知道系数 A 和 B 为多少, 可以组织一个成对实验测出几组 (x_i, y_i) , 根据最小二乘法求出 A, B 最终

估计值 \hat{a}, \hat{b}

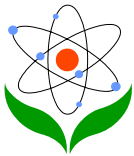
由此可以确定出直线方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

这个步骤好似选择一条直线与这些点 (x_i, y_i) 作最佳配合, 故称直线拟合.

三. 应用

全电路的欧姆定律公式 $E=U+Ir$, 可变形为 $U = E - Ir$, E, r 为定值, U, I 为变量, 满足关系式 $y_i = A + Bx_i$, $E, -r$ 分别相当于系数 A, B , I, U 分别相当于 x_i, y_i . 在作“应用全电路的欧姆定律测电源的电动势 E 和内阻 r ”的实验中, (所测数据如下表), 应用最小二乘法求 E, r .

电流 I(mA)	30	60	90	120	150	180	170	140	110	80	50
电压 U(v)	1.45	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.27	1.32	1.36	1.39	1.43



$$\begin{cases} E = \frac{(\sum I_i^2)(\sum U_i) - (\sum I_i)(\sum I_i U_i)}{\Delta} \\ -r = \frac{N(\sum I_i U_i) - (\sum I_i)(\sum U_i)}{\Delta} \end{cases}$$

$$\Delta = N(\sum I_i^2) - (\sum I_i)^2$$

$$\sum I_i^2 = 0.1514$$

$$\sum U_i = 14.95$$

$$\sum I_i = 1.18$$

$$\sum I_i U_i = 1.573$$

$$\sum I_i (\sum I_i U_i) = 1.857$$

$$\Delta = N(\sum I_i^2) - (\sum I_i)^2 = 0.273$$

$$E = \frac{(\sum I_i^2)(\sum U_i) - (\sum I_i)(\sum I_i U_i)}{\Delta} = \frac{0.1514 * 14.95 - 1.18 * 1.5736}{0.273} = 1.49(\text{v})$$

$$-r = \frac{N(\sum I_i U_i) - (\sum I_i)(\sum U_i)}{\Delta} = \frac{11 * 1.5736 - 1.18 * 14.95}{0.273} = 1.21(\Omega)$$

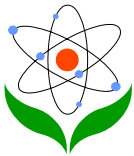
$$U = 1.49 - 1.21I$$

上述关系可以较精确地反应全电路的奥姆定律。

当然,现在市面上有一些现成的软件,例如微软公司提供的 Excel,可以对实验数据进行作图和线性拟合,求出电动势 E 和电源内阻 r ,大大简化了手工劳动,值得推广,但同时也要求学生熟悉软件的操作,并且具有一定计算机操作基础。本文介绍的是一种更为简单的方法,学生只要把所测的电压和电流数据输入计算机,敲回车键,就能从显示屏上获得 E 和 r 值,并实现对实验数据的处理,此方法仅供中学老师和学生参考,希望能给一些启示和帮助。

四. 程序设计

对具有线性关系的一对物理量 x, y 测出一系列测量值 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, n)$, 用最小二乘法求“最佳”线性方程 $y = A + Bx$ 的参数 A, B , 以及在横轴上的截距 C .



约定:

$$S_x = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

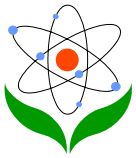
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

则

$$D = nS_{xx} - S_x^2$$
$$B = (nS_{xy} - S_x S_y) / D$$
$$A = (S_{xx} S_y - S_x S_{xy}) / D$$
$$C = -A / B$$

该实验的 C 语言程序.

```
#define max 40
#include <math.h>
#include <stdio.h>
float X[max],Y[max];
void main(void)
{int i,N;
 float Sx,Sy,Sxx,Syy,Sxy;
 float D,B,A,C;
 Sx=0;Sy=0;Sxx=0;Syy=0;Sxy=0;
 printf("\n\n\n\n please input number of team\n");
 scanf("%d",&N);
 printf("please input experiment data x y\n");
 for(i=0;i<=N-1;i++)
     scanf("%f%f",&X[i],&Y[i]);
 for(i=0;i<=N-1;i++){
     Sx=Sx+X[i];
```



```
Sxx=Sxx+X[i]*X[i];
Sy=Sy+Y[i];
Syy=Syy+Y[i]*Y[i];
Sxy=Sxy+X[i]*Y[i];
D=N*Sxx-Sx*Sx; B=(N*Sxy-Sx*Sy)/D;
A=(Sxx*Sy-Sx*Sxy)/D;C=-A*B;}
printf("B=%1.3f,A=%1.3f,C=%1.3f\n",B,A,C);
printf("\n\n Explain: A,B stand for the coefficient of equation y=A+Bx\n");
printf("          C stand for the interception of x axle\n");}
```

屏幕显示运行结果:

please number of data

11 (输入数据的组数)

please input experiment data x y (输入每组数据的 x,y 值)

0.03	1.45
0.06	1.42
0.09	1.38
0.12	1.34
0.15	1.31
0.18	1.28
0.17	1.27
0.14	1.32
0.11	1.36
0.08	1.39
0.05	1.43

D=0.273, B=-1.214, A=1.489, C=1.227 (屏幕显示结果)

该线性方程为: $y = 1.489 - 1.214x$

可知: 电源的电动势 $E = 1.489$, 内电动势 $r = 1.21$

参考文献:

- [1] 《物理》高级中学课本 第二册 (必修)。人民教育出版社(北京)。1990/10
- [2] 《实验物理教程》主编 肖苏。中国科技大学出版社(合肥)。1998/12
- [3] 《误差理论与应用》肖明耀。计量出版社。