

最小二乘法應用於中學物理實驗舉例

賴莉飛、王笑君、吳先球

華南師範大學物理系

廣州, 510631

電郵: Wangxjun@hsut.scnu.edu.cn

收稿日期: 二零零二年六月十七日(十二月十一日再修定)

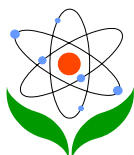
內容

- [摘要](#)
 - [問題的提出](#)
 - [最小二乘法線性擬合](#)
 - [應用](#)
 - [程式設計](#)
 - [參考文獻](#)
-

摘要

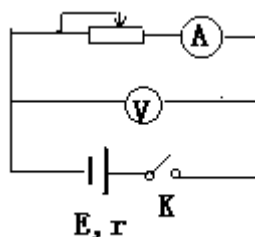
以中學物理求電源電動勢和內阻實驗為例, 提出採用最小二乘法線性擬合可以較其他方法得到更高的精度。此外, 借助於 C 語言編程, 省卻了手工計算的麻煩, 也避免了較高的電腦操作要求。

關鍵字: 電動勢, 內阻, 最小二乘法線性擬合, C 語言



一·問題的提出

實驗"應用全電路的歐姆定律測電源電動勢 (E) 和內阻(r)", 在中學階段, 可用公式法^[1]和作圖法。公式法如圖所示, 測出兩組電流強度 I 和電壓 U 的資料,



代入方程組
$$\begin{cases} U_1 = E - I_1 r \\ U_2 = E - I_2 r \end{cases}$$
, 即可求出 E, r。

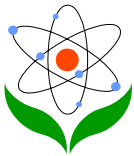
為求準確, 可以多算出幾組 E, r, 最後求它們的平均值。這種方法由於有儀器、環境、以及人自身等因素造成的系統誤差, 以及目測不准、平衡點確定不准, 讀數不准、電源電壓起伏而引起微小變化等造成的偶然誤差, 使最後結果的誤差比較大。作圖法則要求學生取十組左右的點, 以路端電流 (I) 為橫軸, 路端電壓 (U) 為縱軸, 畫出 U-I 關係圖像, 根據閉合電路的歐姆定律 $U = E - Ir$, 可知 U 是 I 的一次函數, 所作圖應為一直線。通過儘量多的點作一條直線, 或者使這些點儘量接近於一條直線, 那麼, 所作直線縱軸的截距就是電源的電動勢 E, 橫軸的截距就是電路短路時最大電流 I_{max} , 它的斜率的絕對值等於電源的內阻 r, 即 $r = E/I_{max}$ 。這種方法比直接用公式計算精確, 但不同的學生採用不同的標度單位, 對點的處理也不同, 其最終得出的 E, r 誤差也較大。本文採用最小二乘法線性擬合, 可以較直接作圖法更精確地確定 E 和 r。

二·最小二乘法線性擬合^{[2][3]}

最小二乘法是資料處理和誤差估計中很得力的數學工具, 對於一切從事精密科學實驗的人們來說, 應用最小二乘法解決實際問題, 是幾乎離不開的手段, 因此, 它成為資料處理中異常活躍和應用最廣泛部分之一。

數學公式

如果被測資料滿足線性關係式 $y_i = A + B x_i$, 由相關結論可知 (其中 Σ 表示求和, N 表示資料組的總個數)



$$A = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta}$$
$$B = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta}$$
$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2$$

線性擬合

在物理中,如果已知兩個量關係,即滿足 $y = A + Bx$, 卻不知道係數 A 和 B 為多少, 可以組織一個成對實驗測出幾組 (x_i, y_i) , 根據最小二乘法求出 A, B 最終

估計值 \hat{a}, \hat{b}

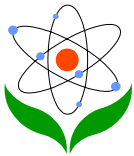
由此可以確定出直線方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

這個步驟好似選擇一條直線與這些點 (x_i, y_i) 作最佳配合, 故稱直線擬合.

三· 應用

全電路的歐姆定律公式 $E=U+Ir$, 可變形為 $U = E - Ir$, E, r 為定值, U, I 為變數, 滿足關係式 $y_i = A + Bx_i$, $E, -r$ 分別相當於係數 A, B , I, U 分別相當於 x_i, y_i . 在作“應用全電路的歐姆定律測電源的電動勢 E 和內阻 r ”的實驗中, (所測資料如下表), 應用最小二乘法求 E, r .

電流 I(mA)	30	60	90	120	150	180	170	140	110	80	50
電壓 U(v)	1.45	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.27	1.32	1.36	1.39	1.43



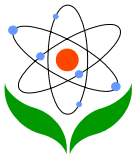
$$\begin{cases} E = \frac{(\sum I_i^2)(\sum U_i) - (\sum I_i)(\sum I_i U_i)}{\Delta} \\ -r = \frac{N(\sum I_i U_i) - (\sum I_i)(\sum U_i)}{\Delta} \end{cases}$$
$$\Delta = N(\sum I_i^2) - (\sum I_i)^2$$
$$\sum I_i^2 = 0.1514$$
$$\sum U_i = 14.95$$
$$\sum I_i = 1.18$$
$$\sum I_i U_i = 1.573$$
$$\sum I_i (\sum I_i U_i) = 1.857$$
$$\Delta = N(\sum I_i^2) - (\sum I_i)^2 = 0.273$$
$$E = \frac{(\sum I_i^2)(\sum U_i) - (\sum I_i)(\sum I_i U_i)}{\Delta} = \frac{0.1514 * 14.95 - 1.18 * 1.5736}{0.273} = 1.49(\text{v})$$
$$-r = \frac{N(\sum I_i U_i) - (\sum I_i)(\sum U_i)}{\Delta} = \frac{11 * 1.5736 - 1.18 * 14.95}{0.273} = 1.21(\Omega)$$
$$U = 1.49 - 1.21I$$

上述關係可以較精確地反應全電路的歐姆定律。

當然,現在市面上有一些現成的軟體,例如微軟公司提供的 Excel,可以對實驗資料進行作圖和線性擬合,求出電動勢 E 和電源內阻 r,大大簡化了手工勞動,值得推廣,但同時也要求學生熟悉軟體的操作,並且具有一定電腦操作基礎。本文介紹的是一種更為簡單的方法,學生只要把所測的電壓和電流資料登錄電腦,敲回車鍵,就能從顯示幕上獲得 E 和 r 值,並實現對實驗資料的處理,此方法僅供中學老師和學生參考,希望能給一些啓示和幫助。

四·程式設計

對具有線性關係的一對物理量 x,y 測出一系列測量值 $x_i, y_i (i=1,2\dots n)$,用最小二乘法求“最佳”線性方程 $y = A + Bx$ 的參數 A, B, 以及在橫軸上的截距 C.



約定：

$$S_x = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

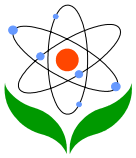
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

則

$$D = nS_{xx} - S_x^2$$
$$B = (nS_{xy} - S_x S_y) / D$$
$$A = (S_{xx} S_y - S_x S_{xy}) / D$$
$$C = -A / B$$

該實驗的 C 語言程式.

```
#define max 40
#include <math.h>
#include <stdio.h>
float X[max],Y[max];
void main(void)
{int i,N;
 float Sx,Sy,Sxx,Syy,Sxy;
 float D,B,A,C;
 Sx=0;Sy=0;Sxx=0;Syy=0;Sxy=0;
 printf("\n\n\n\n please input number of team\n");
 scanf("%d",&N);
 printf("please input experiment data x y\n");
 for(i=0;i<=N-1;i++)
     scanf("%f%f",&X[i],&Y[i]);
 for(i=0;i<=N-1;i++){
     Sx=Sx+X[i];
```



```
Sxx=Sxx+X[i]*X[i];
Sy=Sy+Y[i];
Syy=Syy+Y[i]*Y[i];
Sxy=Sxy+X[i]*Y[i];
D=N*Sxx-Sx*Sx; B=(N*Sxy-Sx*Sy)/D;
A=(Sxx*Sy-Sx*Sxy)/D;C=-A*B;}
printf("B=%1.3f,A=%1.3f,C=%1.3f\n",B,A,C);
printf("\n\n Explain: A,B stand for the coefficient of equation y=A+Bx\n");
printf("          C stand for the interception of x axle\n");}
```

螢幕顯示運行結果：

please number of data

11

(輸入資料的組數)

please input experiment data x y

(輸入每組資料的 x,y 值)

0.03 1.45

0.06 1.42

0.09 1.38

0.12 1.34

0.15 1.31

0.18 1.28

0.17 1.27

0.14 1.32

0.11 1.36

0.08 1.39

0.05 1.43

D=0.273, B=-1.214, A=1.489, C=1.227 (螢幕顯示結果)

該線性方程為： $y = 1.489 - 1.214x$

可知：電源的電動勢 $E = 1.489$, 內電動勢 $r = 1.21$

參考文獻：

- [1] 《物理》高級中學課本 第二冊 (必修)。人民教育出版社(北京)。1990/10
- [2] 《實驗物理教程》主編 肖蘇。中國科技大學出版社(合肥)。1998/12
- [3] 《誤差理論與應用》肖明耀。計量出版社。